一道国家集训队选拔考试题的简证

陈晓明

(江苏省木渎高级中学高三(1)班,215101)

题目 设 a、b、c 是周长不超过 2π 的三角形的三条边长.证明:$\sin a$、$\sin b$、$\sin c$ 可构成三角形的三条边长.

(2004,IMO 中国国家集训队选拔考试)

证明:(1)由题设可知 $0<a、b、c<\pi$,故 $\sin a$、$\sin b$、$\sin c$ 均大于 0.

(2)若 $0<a+b\leqslant\pi$,由题设知 $a+b>c$,即 $\frac{a+b}{2}>\frac{c}{2}$.

又因 $0<\frac{a+b}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$,所以,$0<\frac{c}{2}<\frac{\pi}{2}$.

故 $\sin\frac{a+b}{2}>\sin\frac{c}{2}>0$.

若 $\pi<a+b<2\pi$,则 $0<\pi-\frac{a+b}{2}<\frac{\pi}{2}$.

又由 $a+b+c\leqslant 2\pi$,知

$\pi-\frac{a+b}{2}\geqslant\frac{c}{2}$,且 $0<\frac{c}{2}<\frac{\pi}{2}$.

所以,$\sin\frac{a+b}{2}=\sin\left(\pi-\frac{a+b}{2}\right)>\sin\frac{c}{2}>0$.

(3)由题设可知 $|a-b|<c$,则

$\frac{|a-b|}{2}<\frac{c}{2}$.

又由 $0<a、b、c<\pi$,知

$0\leqslant\frac{|a-b|}{2}<\frac{\pi}{2}$,$0<\frac{c}{2}<\frac{\pi}{2}$.

故 $\cos\frac{|a-b|}{2}>\cos\frac{c}{2}>0$,即

$\cos\frac{a-b}{2}>\cos\frac{c}{2}>0$.

综上所述,有

$\sin\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}>\sin\frac{c}{2}\cdot\cos\frac{c}{2}$,

即 $\sin a+\sin b>\sin c$.

同理,$\sin b+\sin c>\sin a$,

$\sin c+\sin a>\sin b$.

所以,$\sin a$、$\sin b$、$\sin c$ 可构成三角形的三条边长.

因为 $b_1\in B$,且 b_1 是集合 B 中最小的元素,所以,$b_1-1\notin B$.

又因为 $b_1<c_1$,所以,$b_1-1\notin C$.

从而,$b_1-1\in A$.

此时,考虑

$(b_1-1)+(c_{k_0}+1-b_1)=c_{k_0}$,

所以,$c_{k_0}+1-b_1\notin B$.

由于 $c_{k_0+1}=b_1+(c_{k_0}+1-b_1)$,所以,

$c_{k_0}+1-b_1\notin A$.

因此,$c_{k_0}+1-b_1\in C$,即

$(c_{k_0}-b_1)+1\in C$.

故 $c_{k_0}-b_1\notin B$.

再由 k_0 及 c_{k_0} 的最小性得

$c_{k_0}-b_1\notin C$.

从而,$c_{k_0}-b_1\in A$.

考虑 $(c_{k_0}-b_1)+b_1=c_{k_0}$,其中 $c_{k_0}-b_1\in A$,$b_1\in B$,$c_{k_0}\in C$.而这与假设矛盾.

因此,假设不成立.

从而,存在满足命题结论的 x、y、z.

(石文博 辽宁省实验中学高一(2)班,110031 指导教师 贾振鹏 东北育才学校,110001)

万方数据